

MICROONDAS

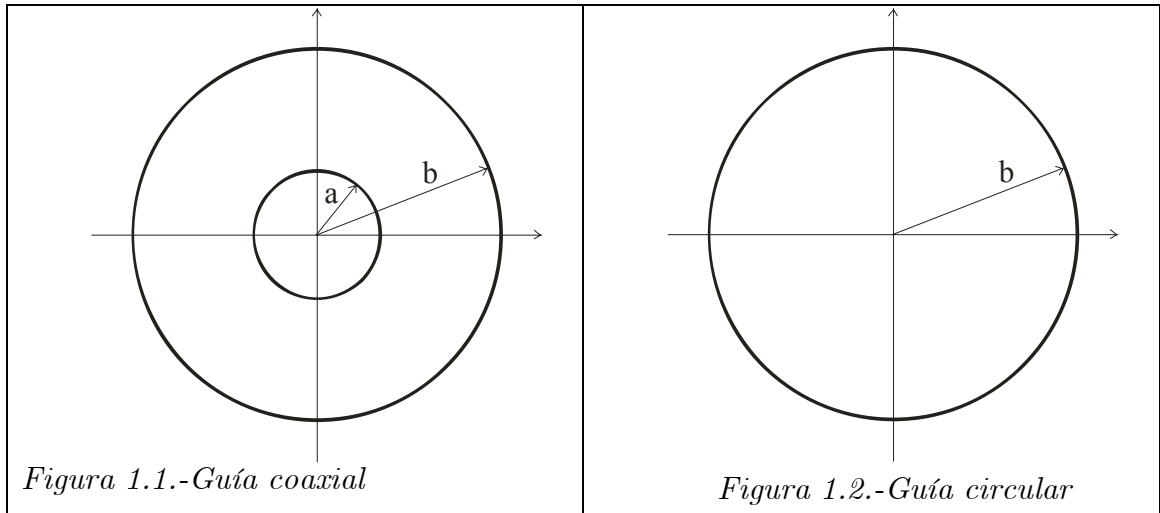
Examen abril 07

M. Baquero, F. Peñaranda y V. Boria

17 ABRIL 07

17.1 PROBLEMA 1 (35p)

Las figuras 1.1 y 1.2 muestran sendas guías, una coaxial (de radios interior $a=3.05\text{ mm}$ y exterior $b=7\text{ mm}$) y la otra circular (de radio $b=7\text{ mm}$). Sus paredes son eléctricas y el dieléctrico interior es aire en los dos casos.



Se pide:

(14p)a) Calcule el número de onda de corte (k_c) y la frecuencia de corte (f_c) de los 3 primeros modos de cada una de las dos guías planteadas.

De todos los modos calculados en el apartado anterior (3 en cada guía) nos interesa quedarnos únicamente con el primer modo T.M. que aparezca antes en cualquiera de las dos guías.

(3p) b) Para este modo, sea de la guía que sea, calcule todas las componentes de campo eléctrico y magnético.

Asimismo, con esta guía seleccionada se desea construir una cavidad resonante. Para esta cavidad, calcule:

(8p) c) La altura que debe tener la cavidad así formada (en guía coaxial o circular, según se haya seleccionado en el apartado b) y la permitividad del material que debe rellenarla para que la 1ª frecuencia de resonancia de este modo sea $f_0=11.6\text{ GHz}$.

(10p)d) Por último, calcule el factor de calidad de la cavidad anterior si suponemos que el dieléctrico del interior de la cavidad tiene pérdidas caracterizadas por su $tg\delta$, la posición en la pared lateral ($r_0=b, \varphi_0, z_0$) donde colocaría una espira para poder excitar el modo TM que estamos analizando, así como el plano en el que debería estar contenida.

Datos:

- 1) Ceros de las siguientes ecuaciones con productos cruzados de las funciones de Bessel ($\alpha > 1$):

$$J_\nu(x) \cdot Y_\nu(\alpha \cdot x) - J_\nu(\alpha \cdot x) \cdot Y_\nu(x) = 0 \Rightarrow x_{\nu p} \approx \frac{p \cdot \pi}{\alpha - 1}, p = 1, 2, 3, \dots$$

donde $x_{\nu p}$ es el cero p -ésimo cuando el orden de las funciones de Bessel es ν .

$$J_\nu'(x) \cdot Y_\nu'(\alpha \cdot x) - J_\nu'(\alpha \cdot x) \cdot Y_\nu'(x) = 0 \Rightarrow x_{\nu p}' \approx \begin{cases} \frac{p \cdot \pi}{\alpha - 1}, & \left\{ \begin{array}{l} \nu = 0 \\ p = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right. \\ \frac{2 \cdot \nu}{\alpha + 1}, & \left\{ \begin{array}{l} \nu > 0 \\ p = 1 \end{array} \right. \\ \frac{(p-1) \cdot \pi}{\alpha - 1}, & \left\{ \begin{array}{l} \nu > 0 \\ p = 2, 3, \dots \end{array} \right. \end{cases}$$

donde $x_{\nu p}'$ es el cero p -ésimo cuando el orden de las funciones de Bessel es ν .

- 2) Ceros de las funciones de Bessel de primera especie $J_n(x)$ (denominados p_{nl}) y de su primera derivada $J_n'(x)$ (denominados p_{nl}')

p_{nl}		ℓ				
		1	2	3	4	5
n	0	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309
	0.5	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080
	1	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
	1.5	4.4934	7.7253	10.9041	14.0662	17.2208
	2	5.1356	8.4172	11.6198	14.7960	17.9598
	2.5	5.7635	9.0950	12.3229	15.5146	18.6890
	3	6.3802	9.7610	13.0152	16.2235	19.4094

p_{nl}'		ℓ				
		1	2	3	4	5
n	0	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
	0.5	1.1656	4.6042	7.7899	10.9499	14.1017
	1	1.8412	5.3314	8.5363	11.7060	14.8636
	1.5	2.4605	6.0293	9.2614	12.4453	15.6116
	2	3.0542	6.7061	9.9695	13.1704	16.3475
	2.5	3.6328	7.3670	10.6636	13.8834	17.0728
	3	4.2012	8.0152	11.3459	14.5858	17.7887

3) Componentes transversales de campo en función de la axiales:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \cdot (-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \vec{\nabla}_t \times (H_z \cdot \hat{z}) - \gamma \cdot \vec{\nabla}_t \cdot E_z) \\ \vec{H}_t &= \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \cdot (j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \vec{\nabla}_t \times (E_z \cdot \hat{z}) - \gamma \cdot \vec{\nabla}_t \cdot H_z) \end{aligned}$$

4) Operadores en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_t \cdot \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \hat{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \hat{\varphi} \\ \vec{\nabla}_t \times \vec{F} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} \cdot \hat{r} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \cdot \hat{\varphi} + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot F_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \cdot \hat{z} \end{aligned}$$

a) Para calcular los números de onda de corte de cada una de las dos guías planteadas, debemos plantear las ecuaciones de onda en cada una de ellas. Empezaremos por la guía coaxial.

Sabemos que los modos posibles en una guía son los modos T.E.M. (Transversales Eléctricos y Magnéticos), T.M. (Transversales Magnéticos) y T.E. (Transversales Eléctricos). En la guía coaxial podemos tener los tres tipos, ya que los modos T.E.M. requieren un medio homogéneo y al menos dos conductores, como es el caso.

Para los modos T.E.M. sabemos que se debe cumplir que $k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = 0$, por lo que el número de onda de corte es cero y así la frecuencia de corte asociada, que es aquella a la cual la constante de propagación γ es cero, será también cero. Es decir, el primer modo de una guía coaxial es el modo T.E.M.

Para el resto de modos (T.E. y T.M.) vamos a plantear sus ecuaciones de onda. En los modos T.M. tenemos que la componente axial de campo magnético $H_z = 0$ por lo que basta con plantear la ecuación de onda para la componente axial de campo eléctrico:

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 + \gamma^2) \cdot E_z = \nabla_t^2 E_z + k_c^2 \cdot E_z = 0 \tag{1.1}$$

La solución en coordenadas cilíndricas es bien conocida:

$$E_z = [A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) + B \cdot Y_\nu(k_c \cdot r)] \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \tag{1.2}$$

donde $J_\nu(k_c \cdot r)$ e $Y_\nu(k_c \cdot r)$ son las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden ν y la función trigonométrica podría ser también $\sin(\nu \cdot \varphi + \Theta_0)$, ya que todo depende del origen de fases que tomemos.

Dada la periodicidad en φ de la estructura coaxial, el orden ν debe ser un número entero, de tal forma que $\nu = n$.

Además, las condiciones de contorno de la estructura suponen que el campo eléctrico tangencial en los conductores debe ser nulo, de tal forma que:

$$E_z \begin{pmatrix} r = a \\ r = b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A \cdot J_n(k_c \cdot a) + B \cdot Y_n(k_c \cdot a) = 0 \\ A \cdot J_n(k_c \cdot b) + B \cdot Y_n(k_c \cdot b) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Estas ecuaciones se traducen en las siguientes relaciones:

$$B = -A \cdot \frac{J_n(k_c \cdot a)}{Y_n(k_c \cdot a)} = -A \cdot \frac{J_n(k_c \cdot b)}{Y_n(k_c \cdot b)} \quad (1.4)$$

Y además en que se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$\frac{J_n(k_c \cdot a)}{Y_n(k_c \cdot a)} = \frac{J_n(k_c \cdot b)}{Y_n(k_c \cdot b)} \Rightarrow J_n(k_c \cdot b) \cdot Y_n(k_c \cdot a) - J_n(k_c \cdot a) \cdot Y_n(k_c \cdot b) \quad (1.5)$$

Nótese que en esta ecuación el orden n es arbitrario y la incógnita es el número de onda de corte k_c . Si ahora hacemos los siguientes cambios de variable:

$$k_c \cdot a = x \quad \frac{b}{a} = \alpha \quad (1.6)$$

podremos reescribir la ecuación como:

$$\begin{aligned} J_n(k_c \cdot b) \cdot Y_n(k_c \cdot a) - J_n(k_c \cdot a) \cdot Y_n(k_c \cdot b) &= \\ = J_n(\alpha \cdot x) \cdot Y_n(x) - J_n(x) \cdot Y_n(\alpha \cdot x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Y esta ecuación es exactamente la misma que aparece en el enunciado del problema como 1^{er} dato. Así pues, para diferentes valores de n vamos a calcular la solución de la ecuación anterior, sabiendo que los ceros son $x_{np} = \frac{p \cdot \pi}{\alpha - 1}$, $p = 1, 2, 3, \dots$. Como los ceros son independientes del orden n , tenemos para todo n :

x_{np}	p			
	1	2	3	4
n=0,1,2,...	2.4117	4.8235	7.2352	9.6469

Puesto que $x_{np} = k_c \cdot a$, los números de onda de corte son:

$k_c _{np}$	p			
	1	2	3	4
n=0,1,2,...	793.3	1586.7	2380.0	3173.3

Y la frecuencia de corte asociada es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \quad (1.8)$$

lo que da las siguientes frecuencias de corte:

$f_c _{np}$	p			
	1	2	3	4
n=0,1,2,...	37.8788 GHz	75.7576 GHz	113.6364 GHz	151.5152 GHz

Por otra parte, para el cálculo de los modos TE tenemos que la componente axial de campo eléctrico se anula $E_z = 0$ por lo que basta con plantear la ecuación de onda para la componente axial de campo magnético:

$$\nabla_t^2 H_z + (k^2 + \gamma^2) \cdot H_z = \nabla_t^2 H_z + k_c^2 \cdot H_z = 0 \quad (1.9)$$

La solución en coordenadas cilíndricas es bien conocida, como antes:

$$H_z = [A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) + B \cdot Y_\nu(k_c \cdot r)] \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \quad (1.10)$$

con las mismas consideraciones sobre las funciones de Bessel y la función trigonométrica que para los modos T.M.

También, y dada la periodicidad en φ de la estructura coaxial, el orden ν debe ser un número entero, de tal forma que $\nu = n$.

Además, las condiciones de contorno de la estructura suponen que el campo eléctrico tangencial es los conductores debe ser nulo, de tal forma que en este caso:

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A \cdot J_n'(k_c \cdot a) + B \cdot Y_n'(k_c \cdot a) = 0 \\ A \cdot J_n'(k_c \cdot b) + B \cdot Y_n'(k_c \cdot b) = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Estas ecuaciones se traducen en las siguientes relaciones:

$$B = -A \cdot \frac{J_n'(k_c \cdot a)}{Y_n'(k_c \cdot a)} = -A \cdot \frac{J_n'(k_c \cdot b)}{Y_n'(k_c \cdot b)} \quad (1.12)$$

Y además en que se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$\frac{J_n'(k_c \cdot a)}{Y_n'(k_c \cdot a)} = \frac{J_n'(k_c \cdot b)}{Y_n'(k_c \cdot b)} \Rightarrow J_n'(k_c \cdot b) \cdot Y_n'(k_c \cdot a) - J_n'(k_c \cdot a) \cdot Y_n'(k_c \cdot b) \quad (1.13)$$

Nótese de nuevo que en esta ecuación el orden n es arbitrario y la incógnita es el número de onda de corte k_c . Si ahora hacemos los mismos cambios de variable que antes:

$$k_c \cdot a = x \quad \frac{b}{a} = \alpha \quad (1.14)$$

podremos reescribir la ecuación como:

$$\begin{aligned} J_n'(k_c \cdot b) \cdot Y_n'(k_c \cdot a) - J_n'(k_c \cdot a) \cdot Y_n'(k_c \cdot b) &= \\ = J_n'(\alpha \cdot x) \cdot Y_n'(x) - J_n'(x) \cdot Y_n'(\alpha \cdot x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Y esta ecuación es exactamente la misma que aparece en el enunciado del problema como 2º dato. Así pues, para diferentes valores de n vamos calcular la solución de la ecuación anterior:

x_{np}'		p			
		1	2	3	4
n	0	2.4117	4.8235	7.2352	9.6469
	1	0.6056	2.4117	4.8235	7.2352
	2	1.2112	2.4117	4.8235	7.2352
	3	1.8167	2.4117	4.8235	7.2352

Puesto que $x_{np}' = k_c \cdot a$, los números de onda de corte son:

$k_c _{np}$		p			
		1	2	3	4
n	0	793.3	1586.7	2380.0	3173.3
	1	199.2	793.3	1586.7	2380.0
	2	398.4	793.3	1586.7	2380.0
	3	597.6	793.3	1586.7	2380.0

Y la frecuencia de corte asociada es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad (1.16)$$

lo que da las siguientes frecuencias de corte:

$f_c _{np}$ (GHz)		p			
		1	2	3	4
n	0	37.8788	75.7576	113.6364	151.5152
	1	9.5113	37.8788	75.7576	113.6364
	2	19.0225	37.8788	75.7576	113.6364
	3	28.5338	37.8788	75.7576	113.6364

Esto nos lleva a que los primeros modos T.E. son los T.E.₁₁, T.E.₂₁ y T.E.₃₁, con frecuencias de corte inferiores a los primeros modos T.M. calculados antes.

En definitiva, para la guía coaxial, los 3 primeros modos son:

	Modos		
	T.E.M.	T.E. ₁₁	T.E. ₂₁
f_c (GHz)	0	9.5113	19.0225

Seguidamente pasamos a analizar la guía circular. En este caso no tenemos modos T.E.M., al tener un único conductor, de tal forma que sólo plantearemos los modos T.M. y T.E.

Empezando por los modos T.M., como en la guía coaxial planteamos la ecuación de onda para la componente axial del campo eléctrico E_z :

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 + \gamma^2) \cdot E_z = \nabla_t^2 E_z + k_c^2 \cdot E_z = 0 \tag{1.17}$$

La solución en coordenadas cilíndricas es bien conocida:

$$E_z = [A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) + B \cdot Y_\nu(k_c \cdot r)] \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \tag{1.18}$$

De nuevo, y dada la periodicidad en φ de la estructura, el orden ν debe ser un número entero, de tal forma que $\nu = n$.

Además hay que tener en cuenta que ahora el origen ($r=0$) es un punto del medio donde queremos calcular el campo, y hay que recordar que la función de Bessel de 2ª especie $Y_\nu(k_c \cdot r)$ es singular en $r=0$, por lo que no puede formar parte de la solución del campo eléctrico. Por ello la amplitud B de esta función se debe anular, quedando la solución como:

$$E_z = A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \tag{1.19}$$

Las condiciones de contorno de la estructura suponen que el campo eléctrico tangencial en los conductores debe ser nulo, de tal forma que:

$$E_z(r = b) = 0 \Rightarrow A \cdot J_n(k_c \cdot b) = 0 \tag{1.20}$$

La solución de esta ecuación, que son los ceros de la función de Bessel de 1ª especie, es un dato del enunciado (ceros p_{nl}), por lo que tenemos:

$$k_c \cdot b = p_{nl} \Rightarrow k_c = \frac{p_{nl}}{b} \tag{1.21}$$

De esta forma, los números de onda de corte son:

$k_c _{nl}$		p			
		1	2	3	4
n	0	343.5	788.6	1236.2	1684.5
	1	547.4	1002.2	1453.4	1903.4
	2	733.7	1202.5	1660.0	2113.7
	3	911.5	1394.4	1859.3	2317.6

Y la frecuencia de corte asociada es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{p_{nl}}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \tag{1.22}$$

lo que da las siguientes frecuencias de corte:

$f_c _{nl}$ (GHz)		P			
		1	2	3	4
n	0	16.4031	37.6520	59.0264	80.4292
	1	26.1358	47.8528	69.3925	90.8799
	2	35.0297	57.4134	79.2581	100.9221
	3	43.5186	66.5792	88.7757	110.6591

Por ello, los primeros modos T.M. son los T.M.₀₁, T.M.₁₁ y T.M.₂₁.

Por otra parte, para el cálculo de los modos TE tenemos que la componente axial de campo eléctrico se anula $E_z = 0$ por lo que basta con plantear la ecuación de onda para la componente axial del campo magnético:

$$\nabla_t^2 H_z + (k^2 + \gamma^2) \cdot H_z = \nabla_t^2 H_z + k_c^2 \cdot H_z = 0 \quad (1.23)$$

La solución en coordenadas cilíndricas es:

$$H_z = [A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) + B \cdot Y_\nu(k_c \cdot r)] \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \quad (1.24)$$

De nuevo, y dada la periodicidad en φ de la estructura, el orden ν debe ser un número entero, de tal forma que $\nu = n$.

Además también se anula la amplitud B de la función de Bessel de 2ª especie dada su singularidad en el origen, quedando la solución como:

$$H_z = A \cdot J_\nu(k_c \cdot r) \cdot \cos(\nu \cdot \varphi + \Phi_0) \quad (1.25)$$

Las condiciones de contorno de la estructura suponen que el campo eléctrico tangencial en los conductores debe ser nulo, de tal forma que:

$$\frac{\partial H_z(r=b)}{\partial r} = 0 \Rightarrow A \cdot J_n'(k_c \cdot b) = 0 \quad (1.26)$$

La solución de esta ecuación, que son los ceros de la primera derivada de la función de Bessel de 1ª especie, es un dato del enunciado (ceros p_{nl}'), por lo que tenemos:

$$k_c \cdot b = p_{nl}' \Rightarrow k_c = \frac{p_{nl}'}{b} \quad (1.27)$$

De esta forma, los números de onda de corte son:

$k_c _{nl}$		P			
		1	2	3	4
n	0	547.4	1002.2	1453.4	1903.4
	1	263.0	761.6	1219.5	1672.3
	2	436.3	958.0	1424.2	1881.5
	3	600.2	1145.0	1620.8	2083.7

Y la frecuencia de corte asociada es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{p_{nl}'}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad (1.28)$$

lo que da las siguientes frecuencias de corte:

$f_c _{nl}$ (GHz)		p			
		1	2	3	4
n	0	26.1358	47.8528	69.3925	90.8799
	1	12.5586	36.3654	58.2256	79.8458
	2	20.8327	45.7420	68.0010	89.8341
	3	28.6560	54.6713	77.3897	99.4890

Por ello, los primeros modos T.E. son los T.E.₁₁, T.E.₂₁ y T.E.₀₁.

En definitiva, para la guía circular, los 3 primeros modos son:

	Modos		
	T.E. ₁₁	T.M. ₀₁	T.E. ₂₁
f _c (GHz)	12.5586	16.4031	20.8327

b) Del apartado anterior concluimos que tenemos un modo T.E.M. y dos modos T.E. en la guía coaxial y 2 modos T.E. y un modo T.M. en la guía circular, por lo que será este último el que nos interesará para el problema.

La componente axial de campo eléctrico se ha calculado antes y es:

$$E_z = A \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot \cos(n \cdot \varphi + \Phi_0) \quad (1.29)$$

Como el modo es el T.M.₀₁, tenemos que anular el orden n de la función de Bessel ($n=0$), quedando:

$$E_z = B \cdot J_0(k_c \cdot r) \quad (1.30)$$

Donde el número de onda de corte es:

$$k_c \cdot b = p_{01} \Rightarrow k_c = \frac{p_{01}}{b} = 343.5 \quad (1.31)$$

Por lo que la frecuencia de corte es:

$$k_c = k = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{p_{01}}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = 16.4 \text{ GHz} \quad (1.32)$$

El resto de componentes serán, a partir de los datos del problema:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \vec{\nabla} E_z = -\frac{\gamma}{k_c} \cdot B \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot \hat{r} \\ \vec{H}_t &= \frac{\hat{z} \times \vec{E}_t}{Z_{TM}} = \left\langle Z_{TM} = \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \right\rangle = -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot B \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot \hat{\varphi} \end{aligned} \quad (1.33)$$

c) Para construir una cavidad con este modo vamos a escribir todas las componentes de campo eléctrico y magnético en el interior de la cavidad:

$$\begin{aligned} E_z &= J_0(k_c \cdot r) \cdot (B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot z} + B^- \cdot e^{+j\beta \cdot z}) \\ E_r &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot (B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot z} - B^- \cdot e^{+j\beta \cdot z}) \\ H_\varphi &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot (B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot z} + B^- \cdot e^{+j\beta \cdot z}) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Las condiciones de contorno imponen que en las tapas superior e inferior de la cavidad el campo eléctrico tangencial debe ser cero, por lo que:

$$E_r \begin{pmatrix} z=0 \\ z=d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} B^+ - B^- = 0 \\ B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot d} - B^- \cdot e^{+j\beta \cdot d} = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

De la 1ª ecuación obtenemos:

$$B^+ = B^- \quad (1.36)$$

Y de la 2ª ecuación, tras utilizar el resultado de la 1ª:

$$B^+ \cdot e^{-j\beta \cdot d} - B^+ \cdot e^{+j\beta \cdot d} = 0 \Rightarrow \sin(\beta \cdot d) = 0 \Rightarrow \beta \cdot d = p \cdot \pi, p = 0,1,2,\dots \quad (1.37)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de campo, tenemos:

$$\begin{aligned} E_z &= J_0(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot 2 \cdot \cos(\beta \cdot z) \\ E_r &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot (-2 \cdot j) \cdot \sin(\beta \cdot z) \\ H_\varphi &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot 2 \cdot \cos(\beta \cdot z) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Y donde la frecuencia de resonancia se obtiene a partir de la ecuación (1.37) y sabiendo que la relación con el número de onda de corte es:

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon - \beta^2 \quad (1.39)$$

Por lo tanto, despejando tenemos:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \cdot \sqrt{k_c^2 + \beta^2} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p_{01}}{b}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot \pi}{d}\right)^2} \quad (1.40)$$

Como nos piden el primer modo resonante, este se consigue cuando $p=0$, es decir cuando $\beta=0$ (condición de corte), por lo que las componentes de campo eléctrico y magnético son:

$$\begin{aligned} E_z &= J_0(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot 2 \\ E_r &= 0 \\ H_\varphi &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c} \cdot J_0'(k_c \cdot r) \cdot B^+ \cdot 2 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Y, en este caso, la frecuencia de resonancia coincidirá con la frecuencia de corte del modo T.M.₀₁:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \cdot \sqrt{k_c^2 + \beta^2} = \frac{p_{01}}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad (1.42)$$

Y, por lo tanto, la altura de la cavidad no va a influir en la frecuencia de resonancia que nos piden. En definitiva la altura d de la cavidad puede ser cualquiera.

No así la permitividad del material que debe rellenar la cavidad, ya que si la frecuencia de resonancia ha de ser $f_0=11.6 \text{ GHz}$, de la última ecuación debemos despejar la permitividad, quedando:

$$f_0 = \frac{p_{01}}{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}} = 11.6 \text{ GHz} \Rightarrow \epsilon_r = 2 \quad (1.43)$$

d) Finalmente, para calcular el factor de calidad debemos partir de su propia definición:

$$Q = \omega_0 \cdot \frac{U_T}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{U_e + U_m}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot U_e}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot U_m}{P_L} \quad (1.44)$$

Donde se ha tenido en cuenta que las energías eléctrica y magnética son iguales en resonancia.

Las energías almacenadas eléctrica y magnética podemos calcularlas como:

$$U_e = \frac{1}{4} \cdot \epsilon \cdot \iiint_V |\vec{E}|^2 \cdot dV \quad U_m = \frac{1}{4} \cdot \mu \cdot \iiint_V |\vec{H}|^2 \cdot dV \quad (1.45)$$

La potencia disipada P_L es la disipada, en este caso, en el dieléctrico, cuya expresión es:

$$P_L = \frac{1}{4} \cdot \sigma_e \cdot \iiint_V |\vec{E}|^2 \cdot dV \quad (1.46)$$

Siendo σ_e la conductividad equivalente del dieléctrico de valor¹:

$$\sigma_e = \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \text{tg}\delta \quad (1.47)$$

Por lo tanto si utilizamos la expresión (1.44) para calcular el factor de calidad con la energía eléctrica tendremos:

$$\begin{aligned} Q &= \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot U_e}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \epsilon \cdot \iiint_V |\vec{E}|^2 \cdot dV}{\frac{1}{4} \cdot \sigma_e \cdot \iiint_V |\vec{E}|^2 \cdot dV} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \epsilon}{\frac{1}{4} \cdot \sigma_e} = \\ &= \omega_0 \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\omega_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \text{tg}\delta} = \frac{1}{\text{tg}\delta} = Q \end{aligned} \quad (1.48)$$

Por su parte, para colocar la espira debemos considerar que esta se excita cuando es atravesada por el campo magnético, por lo que tenemos que tener

¹ Esta expresión proviene de la 2ª ecuación de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \vec{E} = j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot (1 - j \cdot \text{tg}\delta) \cdot \vec{E} = \\ &= \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \text{tg}\delta \cdot \vec{E} + j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} = \sigma_e \cdot \vec{E} + j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

presente las componentes de campo -ecuación (1.38) para los modos TM_{01p} en general y ecuación (1.41) para los modos TM_{010} . Viendo esta última ecuación, que es la que nos interesa, vemos que sólo tenemos una componente de campo magnético, y es en la dirección $\hat{\phi}$, por lo que la espira debe estar contenida en el plano r - z , para que pueda existir flujo de campo magnético que la atraviese.

Respecto a la posición de la misma en la pared lateral ($r_0=b, \varphi_0, z_0$) da igual, puesto que el campo magnético es independiente de φ y de z .

17.2. PROBLEMA 2 (35 p)

Para sintetizar un inversor de impedancias de constante K (Ω) con $K < Z_0$ (es decir, $\bar{K} < 1$), se propone la red de 2 accesos mostrada en la figura 1. Como parámetros de diseño del inversor se considerarán los siguientes: la impedancia característica Z'_0 de la línea de transmisión ideal de longitud $\lambda/4$, y las longitudes eléctricas (ambas iguales y de valor $\phi = \beta l$) de los tramos de línea de transmisión ideal de impedancia característica Z_0 . Se asume que el valor C de los condensadores situados en paralelo es conocido.

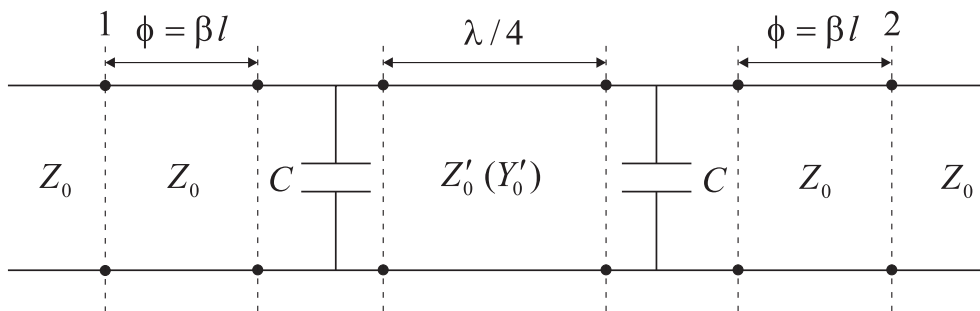


Figura 1: Red de 2 accesos propuesta como inversor de impedancias

Se pide responder a las siguientes cuestiones:

(4 p) a.- Enumerar las propiedades que debe tener una red de 2 accesos para que pueda sintetizar un inversor de impedancias, e indicar si la red de la figura 1 satisface dichas propiedades.

Seguidamente, deducir la expresión del parámetro S_{11} del inversor a sintetizar en función de su constante normalizada \bar{K} .

(12 p) b.- Calcular el parámetro S_{11} de la red mostrada en la figura 1. Expresar el resultado final **en formato de módulo y fase**, y en función de los parámetros \bar{Y}'_0 ($\bar{Y}'_0 = Y'_0/Y_0 = Z_0/Z'_0$), \bar{B} ($\bar{B} = C\omega/Y_0$) y ϕ ($\phi = \beta l$).

Indicar con claridad todas las propiedades que utilice en la resolución del apartado.

(11 p) c.- Deducir una ecuación de diseño que relacione el parámetro \bar{Y}'_0 con la constante normalizada \bar{K} del inversor a sintetizar, y con la susceptancia normalizada \bar{B} conocida.

A continuación, explicar brevemente el proceso a seguir para deducir el otro parámetro de diseño ($\phi = \beta l$) de la red propuesta.

(8 p) d.- Si se pretende sintetizar un inversor con una constante $K = 15 \Omega$ a una frecuencia $f = 600 \text{ MHz}$, y se tiene que $Z_0 = 50 \Omega$ y $C = 12 \text{ pF}$, indicar **todas las posibles soluciones** para la impedancia característica Z'_0 (en Ω) y la longitud física l (en m) de la red propuesta.

a) Un inversor ideal se define como una red de 2 accesos recíproca, sin pérdidas y simétrica, que cuando se carga con una impedancia Z_L permite ver a su entrada una impedancia $Z_{in} = K^2/Z_L$. Así pues, las propiedades que debe tener una red de 2 accesos para poder sintetizar un inversor son que sea recíproca, sin pérdidas y simétrica.

La red de 2 accesos mostrada en la figura 1 está formada por líneas de transmisión ideales (sin pérdidas) y condensadores, por lo que puede afirmarse que es recíproca (al ser pasiva, lineal y no incluir ferritas) así como sin pérdidas. A su vez la red es simétrica, pues presenta un Plano de Simetría (PS) situado a mitad de la línea de transmisión ideal de longitud $\lambda/4$ (ver figura 2).

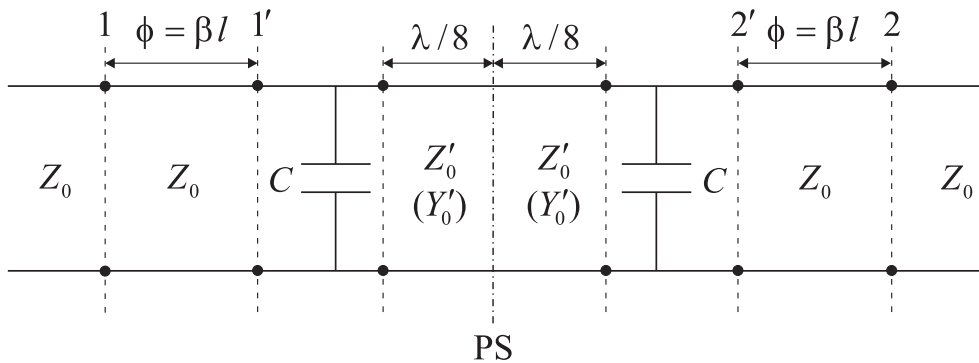


Figura 2: Plano de Simetría de la red de 2 accesos propuesta como inversor

Por tanto, se puede afirmar que la red de 2 accesos propuesta **SÍ satisface las propiedades necesarias para sintetizar un inversor**. Los parámetros de diseño de la red (es decir, la impedancia característica Z'_0 y la longitud l) se escogerán para recuperar el comportamiento eléctrico del inversor a sintetizar.

Para deducir la expresión del parámetro S_{11} del inversor a sintetizar (de constante normalizada \bar{K}), se debe cargar el acceso de salida del inversor con la impedancia característica de referencia (es decir, con Z_0). Según la definición de inversor comentada previamente, a la entrada del mismo se verá una impedancia $Z_{in} = K^2/Z_0$, y por tanto:

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{K^2 - Z_0^2}{K^2 + Z_0^2} = \frac{\bar{K}^2 - 1}{\bar{K}^2 + 1}$$

b) En primer lugar se hará uso de la propiedad de cambio de planos de referencia (ver los nuevos planos de referencia 1' y 2' en la figura 2), que permite relacionar el parámetro S_{11} buscado con el parámetro $S_{1'1'}$ a través de la relación:

$$S_{11} = S_{1'1'} e^{-j2\phi} \quad \text{con } \phi = \beta l$$

A su vez, para calcular el parámetro $S_{1'1'}$ se hará uso de la propiedad de simetría de la red resultante (red original excluyendo los tramos de línea de transmisión de longitud l), cuyo Plano de Simetría (PS) se muestra en la figura 2. Aplicando dicha propiedad se obtiene:

$$S_{1'1'} = \frac{1}{2} (\rho^e + \rho^o)$$

donde ρ^e y ρ^o son, respectivamente, los factores de reflexión que se ven en el acceso 1' de la estructura bajo análisis cuando PS se sustituye por una pared magnética (PM, condición de circuito abierto) y por una pared eléctrica (PE, condición de cortocircuito).

Así pues, para calcular el factor de reflexión ρ^e se debe obtener la admitancia de entrada en el acceso 1' de la red mostrada en la figura 3.

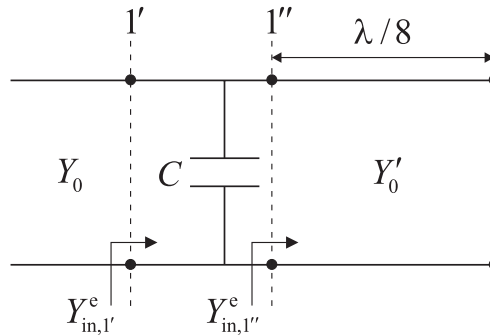


Figura 3: Red de 1 acceso al sustituir PS por PM

Considerando la red de la figura 3, y tras realizar simples operaciones, se deducen las siguientes expresiones:

$$Y_{in,1''}^e = j Y'_0 \tan(\beta l)|_{l=\lambda/8} = j Y'_0 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8}\right) = j Y'_0$$

$$Y_{in,1'}^e = j C \omega + Y_{in,1''}^e = j C \omega + j Y'_0$$

y tras normalizar la última expresión se concluye:

$$\bar{Y}_{in,1'}^e = Y_{in,1'}^e / Y_0 = j C \omega / Y_0 + j Y'_0 / Y_0 = j (\bar{B} + \bar{Y}'_0)$$

donde \bar{B} e \bar{Y}'_0 se han definido en el enunciado del problema.

Por tanto, se obtiene la siguiente expresión para el factor de reflexión buscado:

$$\rho^e = \frac{Y_0 - Y_{in,1'}^e}{Y_0 + Y_{in,1'}^e} = \frac{1 - \bar{Y}_{in,1'}^e}{1 + \bar{Y}_{in,1'}^e} = \frac{1 - j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)}{1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)}$$

Procediendo de modo similar, para deducir el factor de reflexión ρ^o debe calcularse la admitancia de entrada en el acceso 1' de la red mostrada en la figura 4.

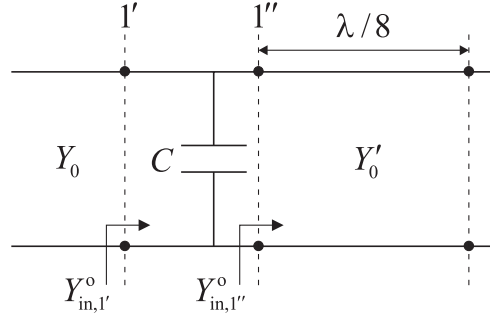


Figura 4: Red de 1 acceso al sustituir PS por PE

Teniendo en cuenta ahora la red de la figura 4, y tras realizar cálculos simples, se obtienen las siguientes expresiones:

$$Y_{in,1''}^o = -j Y'_0 \cot(\beta l)|_{l=\lambda/8} = -j Y'_0 \cot\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8}\right) = -j Y'_0$$

$$Y_{in,1'}^o = j C \omega + Y_{in,1''}^o = j C \omega - j Y'_0$$

y tras normalizar esta última expresión se concluye:

$$\bar{Y}_{in,1'}^o = Y_{in,1'}^o / Y_0 = j C \omega / Y_0 - j Y'_0 / Y_0 = j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)$$

De este modo, se obtiene la siguiente expresión para el factor de reflexión buscado:

$$\rho^o = \frac{Y_0 - Y_{in,1'}^o}{Y_0 + Y_{in,1'}^o} = \frac{1 - \bar{Y}_{in,1'}^o}{1 + \bar{Y}_{in,1'}^o} = \frac{1 - j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)}{1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)}$$

Así pues, una vez se conocen ρ^e y ρ^o , el parámetro $S_{1'1'}$ se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} S_{1'1'} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)}{1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)} + \frac{1 - j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)}{1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)} \right] = \\ &= \frac{[1 - j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)][1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)] + [1 - j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)][1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)]}{2[1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)][1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)]} \end{aligned}$$

Evaluando los diferentes términos que aparecen en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} [1 - j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)] [1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)] &= (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2) - j2\bar{Y}'_0 \\ [1 - j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)] [1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)] &= (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2) + j2\bar{Y}'_0 \\ [1 + j(\bar{B} + \bar{Y}'_0)] [1 + j(\bar{B} - \bar{Y}'_0)] &= (1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2) + j2\bar{B} \end{aligned}$$

se obtiene finalmente la siguiente expresión para $S_{1'1'}$:

$$S_{1'1'} = \frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2)}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2) + j2\bar{B}}$$

Por tanto, el parámetro S_{11} buscado tiene el siguiente aspecto:

$$S_{11} = \frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2)}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2) + j2\bar{B}} e^{-j2\phi} = |S_{11}| e^{j\phi_{S_{11}}}$$

que se expresa en formato de módulo y fase como sigue:

$$|S_{11}| = \sqrt{\frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2)^2}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2)^2 + 4\bar{B}^2}}$$

$$\begin{aligned} \phi_{S_{11}} &= \phi_{\text{num}} - \phi_{\text{den}} - 2\phi \\ \text{con } \phi_{\text{num}} &= \begin{cases} 0 & \text{si } (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2) \geq 0 \\ \pi & \text{si } (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2) < 0 \end{cases} \\ \text{y } \phi_{\text{den}} &= \arctan\left(\frac{2\bar{B}}{1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2}\right) \end{aligned}$$

c) Para sintetizar el inversor de impedancias con la red de 2 accesos propuesta, se deben igualar las expresiones de los parámetros S_{11} deducidas en los apartados anteriores, es decir (teniendo en cuenta que $\bar{K} < 1$):

$$\frac{\bar{K}^2 - 1}{\bar{K}^2 + 1} = \frac{1 - \bar{K}^2}{1 + \bar{K}^2} e^{j\pi} = \sqrt{\frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0{}^2)^2}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0{}^2)^2 + 4\bar{B}^2}} e^{j(\phi_{\text{num}} - \phi_{\text{den}} - 2\phi)}$$

Observando esta última ecuación, se concluye que la ecuación de diseño que relacione el parámetro \bar{Y}'_0 con \bar{K} y \bar{B} se deducirá de igualar los módulos de ambos parámetros S_{11} .

Así pues, la igualdad de los módulos de ambos parámetros S_{11} se traduce en la siguiente ecuación:

$$\frac{1 - \bar{K}^2}{1 + \bar{K}^2} = \sqrt{\frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0)^2}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0)^2 + 4\bar{B}^2}}$$

y elevando ambos términos de la misma al cuadrado se obtiene:

$$\frac{(1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{(1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0)^2}{(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0)^2 + 4\bar{B}^2}$$

Si se define $t = \frac{(1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2}$, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$t(1 - \bar{B}^2 + \bar{Y}'_0)^2 + 4t\bar{B}^2 = (1 + \bar{B}^2 - \bar{Y}'_0)^2$$

en la que desarrollando los términos entre paréntesis elevados al cuadrado se concluye que:

$$t(1 - \bar{B}^2)^2 + 2t(1 - \bar{B}^2)\bar{Y}'_0 + t\bar{Y}'_0{}^4 + 4t\bar{B}^2 = (1 + \bar{B}^2)^2 - 2(1 + \bar{B}^2)\bar{Y}'_0 + \bar{Y}'_0{}^4$$

Agrupando ahora términos en esta última ecuación se obtiene:

$$(1-t)\bar{Y}'_0{}^4 - 2[(1 + \bar{B}^2) + t(1 - \bar{B}^2)]\bar{Y}'_0 + [(1 + \bar{B}^2)^2 - t(1 - \bar{B}^2)^2 - 4t\bar{B}^2] = 0$$

Recordando la definición del parámetro t , a continuación se evalúan los diferentes términos que aparecen en la expresión anterior:

$$(1-t) = 1 - \frac{(1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{(1 + \bar{K}^2)^2 - (1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{4\bar{K}^2}{(1 + \bar{K}^2)^2}$$

$$(1+t) = 1 + \frac{(1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{(1 + \bar{K}^2)^2 + (1 - \bar{K}^2)^2}{(1 + \bar{K}^2)^2} = \frac{2(1 + \bar{K}^4)}{(1 + \bar{K}^2)^2}$$

$$[(1 + \bar{B}^2) + t(1 - \bar{B}^2)] = (1+t) + (1-t)\bar{B}^2 = \frac{2(1 + \bar{K}^4 + 2\bar{K}^2\bar{B}^2)}{(1 + \bar{K}^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \left[\left(1 + \overline{B}^2\right)^2 - t \left(1 - \overline{B}^2\right)^2 - 4t\overline{B}^2 \right] &= \left[\left(1 + \overline{B}^2\right)^2 - t \left\{ \left(1 - \overline{B}^2\right)^2 + 4\overline{B}^2 \right\} \right] = \\ &= \left[\left(1 + \overline{B}^2\right)^2 - t \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 \right] = (1 - t) \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 = \frac{4\overline{K}^2}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2} \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 \end{aligned}$$

Así pues, teniendo en cuenta estos últimos resultados en la ecuación cuadrática deducida anteriormente para el parámetro \overline{Y}'_0 , dicha ecuación se puede reescribir como sigue:

$$\frac{4\overline{K}^2}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2} \overline{Y}'_0{}^4 - \frac{4\left(1 + \overline{K}^4 + 2\overline{K}^2\overline{B}^2\right)}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2} \overline{Y}'_0{}^2 + \frac{4\overline{K}^2}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2} \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 = 0$$

y sacando factor común $\frac{4\overline{K}^2}{\left(1 + \overline{K}^2\right)^2}$ en esta última expresión, se obtiene finalmente la ecuación de diseño del parámetro \overline{Y}'_0 solicitada en este apartado:

$$\boxed{\overline{Y}'_0{}^4 - \left(\overline{K}^2 + 1/\overline{K}^2 + 2\overline{B}^2\right) \overline{Y}'_0{}^2 + \left(1 + \overline{B}^2\right)^2 = 0}$$

Una vez se ha obtenido la ecuación de diseño del parámetro \overline{Y}'_0 , que permite recuperar el módulo del parámetro S_{11} del inversor con la red propuesta, para deducir el otro parámetro de diseño (es decir, $\phi = \beta l$) se buscará recuperar la fase del citado parámetro S_{11} . Observando pues la primera ecuación de este apartado c), se concluye que para ello debe cumplirse:

$$\pi = \phi_{\text{num}} - \phi_{\text{den}} - 2\phi$$

donde los valores de ϕ_{num} y ϕ_{den} son conocidos una vez se obtiene el valor de \overline{Y}'_0 al resolver la ecuación de diseño correspondiente (recordar las expresiones de ϕ_{num} y ϕ_{den} del apartado anterior). Por tanto, para conseguir la igualdad de fases requerida, se deduce la siguiente ecuación de diseño para el parámetro $\phi = \beta l$:

$$\boxed{2\phi = \phi_{\text{num}} - \phi_{\text{den}} - \pi \pm 2m\pi \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots}$$

El término $\pm 2m\pi$ introducido en esta ecuación de diseño no afecta a la igualdad de los parámetros S_{11} conseguida, pero permite controlar el valor l de las longitudes físicas de las dos líneas de impedancia característica Z_0 (por ejemplo se puede escoger m para que l sea un valor positivo).

Por tanto, el segundo parámetro de diseño de la red propuesta (es decir, $\phi = \beta l$) se emplea para recuperar la fase del parámetro S_{11} del inversor a sintetizar. De este modo, la red propuesta se comportará finalmente, a una frecuencia de trabajo, como el inversor de impedancias de constante normalizada \overline{K} deseado.

d) En primer lugar, se obtendrán las posibles soluciones para la impedancia característica Z'_0 de la línea de longitud $\lambda/4$. Para ello, se debe plantear y resolver la ecuación de diseño del parámetro \bar{Y}'_0 deducida en el apartado anterior.

En el ejemplo concreto del inversor que se propone sintetizar, y haciendo uso pues de los datos proporcionados en el enunciado de este apartado, se deducen los siguientes valores intermedios:

$$\bar{K} = \frac{K}{Z_0} = \frac{15}{50} = 0,3$$

$$\bar{B} = C \omega / Y_0 = C \omega Z_0 = (12 \cdot 10^{-12}) (2 \pi 6 \cdot 10^8) 50 = 2,262$$

$$\left(\bar{K}^2 + 1/\bar{K}^2 + 2\bar{B}^2 \right) = (0,3)^2 + 1/(0,3)^2 + 2(2,262)^2 = 21,4344$$

$$\left(1 + \bar{B}^2 \right)^2 = [1 + (2,262)^2]^2 = 37,4133$$

que sustituidos en la citada ecuación de diseño de \bar{Y}'_0 dan lugar a la siguiente ecuación cuadrática:

$$\bar{Y}'_0{}^4 - 21,4344 \bar{Y}'_0{}^2 + 37,4133 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática son:

$$\bar{Y}'_0{}^2 = \frac{21,4344 \pm \sqrt{(21,4344)^2 - 4(37,4133)}}{2} = \begin{cases} 19,5175 \\ 1,9169 \end{cases}$$

Así pues, los dos posibles valores para \bar{Y}'_0 , teniendo en cuenta que la admitancia característica de una línea debe ser siempre positiva, son los siguientes:

$$\bar{Y}'_{0,1} = \sqrt{19,5175} = 4,4178$$

$$\bar{Y}'_{0,2} = \sqrt{1,9169} = 1,3845$$

Teniendo en cuenta que $\bar{Y}'_0 = Z_0/Z'_0$, se deducen fácilmente las siguientes dos posibles soluciones para la impedancia característica Z'_0 :

$$\begin{aligned} Z'_{0,1} &= \frac{Z_0}{\bar{Y}'_{0,1}} = \frac{50}{4,4178} = 11,32 \text{ } (\Omega) \\ Z'_{0,2} &= \frac{Z_0}{\bar{Y}'_{0,2}} = \frac{50}{1,3845} = 36,11 \text{ } (\Omega) \end{aligned}$$

A continuación, se obtendrán las posibles soluciones para el otro parámetro de diseño (es decir, $\phi = \beta l$) y, por tanto, los posibles valores de l . Para ello, se

debe resolver la segunda ecuación de diseño deducida en el apartado anterior, que requiere conocer los valores de ϕ_{num} y ϕ_{den} para cada solución de \bar{Y}'_0 .

Así pues, según se indica en el apartado b), los valores de ϕ_{num} y ϕ_{den} se corresponden, respectivamente, con las fases del numerador y denominador del parámetro $S_{1'1'}$. Por tanto, para la primera solución de \bar{Y}'_0 ($\bar{Y}'_{0,1} = 4,4178$), se tiene:

$$S_{1'1',1} = \frac{(1 + (2,262)^2 - (4,4178)^2)}{(1 - (2,262)^2 + (4,4178)^2) + j 2 (2,262)} = \frac{-13,4009}{15,4009 + j 4,524}$$

$$\phi_{\text{num},1} = \pi = 3,1416 \text{ (rad)} \quad \phi_{\text{den},1} = \arctan\left(\frac{4,524}{15,4009}\right) = 0,2858 \text{ (rad)}$$

y para la segunda solución de \bar{Y}'_0 ($\bar{Y}'_{0,2} = 1,3845$) se obtiene:

$$S_{1'1',2} = \frac{(1 + (2,262)^2 - (1,3845)^2)}{(1 - (2,262)^2 + (1,3845)^2) + j 2 (2,262)} = \frac{4,1998}{-2,1998 + j 4,524}$$

$$\phi_{\text{num},2} = 0 \text{ (rad)} \quad \phi_{\text{den},2} = \arctan\left(\frac{4,524}{-2,1998}\right) = 2,0233 \text{ (rad)}$$

Insertando ahora los valores de ϕ_{num} y ϕ_{den} deducidos para cada solución en la correspondiente ecuación de diseño, se obtienen las siguientes dos posibles soluciones para el parámetro $\phi = \beta l$:

$$2\phi_1 = \phi_{\text{num},1} - \phi_{\text{den},1} - \pi \pm 2m\pi = 3,1416 - 0,2858 - 3,1416 + 2(3,1416) = 5,9976$$

$$\phi_1 = \frac{5,9976}{2} = 2,9988 \text{ (rad)}$$

$$2\phi_2 = \phi_{\text{num},2} - \phi_{\text{den},2} - \pi \pm 2m\pi = 0 - 2,0233 - 3,1416 + 2(3,1416) = 1,1186$$

$$\phi_2 = \frac{1,1186}{2} = 0,5593 \text{ (rad)}$$

donde en ambos casos el término $\pm 2m\pi$ se ha escogido igual a 2π , pues de este modo se obtiene para ϕ los primeros valores positivos posibles (que conducirán a las longitudes físicas positivas más pequeñas).

Si se tiene en cuenta que $\phi = \beta l = 2\pi l/\lambda$, y que a la frecuencia de trabajo $f = 600 \text{ MHz}$ la longitud de onda es $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 6 \cdot 10^8 = 0,5 \text{ m}$, las dos posibles soluciones para la longitud física l son:

$$l_1 = \frac{\phi_1}{2\pi} \lambda = \frac{2,9988}{2(3,1416)} 0,5 = 0,2386 \text{ (m)}$$

$$l_2 = \frac{\phi_2}{2\pi} \lambda = \frac{0,5593}{2(3,1416)} 0,5 = 0,0445 \text{ (m)}$$

17.3. PROBLEMA 3 (30 p)

Se desea diseñar un amplificador a $f_1 = 10 \text{ GHz}$ haciendo uso de un transistor que en pequeña señal presenta los siguientes parámetros S:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,662 \angle -46^\circ & 0,196 \angle -25,6^\circ \\ 1,25 \angle -26,8^\circ & 0,483 \angle -42^\circ \end{bmatrix}$$

Con estos valores los círculos de estabilidad de entrada y salida son los mostrados en la figura 1(en la carta de Smith adjunta podrán observarse con mayor precisión).

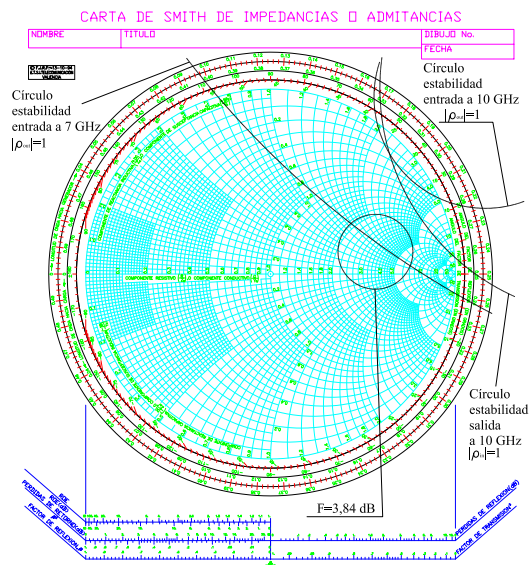


Figura 1: Círculos de estabilidad y ruido

Observando el comportamiento de este transistor a otras frecuencias se descubre que la situación más desfavorable desde el punto de vista de estabilidad se produce a la frecuencia de $f_2 = 7 \text{ GHz}$ donde presenta los siguientes parámetros de dispersión:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,662 \angle 2^\circ & 0,19 \angle -10,6^\circ \\ 1,25 \angle 9,2^\circ & 0,87 \angle 87^\circ \end{bmatrix}$$

para los que tendríamos un círculo de estabilidad de entrada como el recogido también en la figura 1.

(5 p) a.- Indicar sobre la carta de Smith adjunta las zonas de inestabilidad de ρ_s para las frecuencias f_1 y f_2 .

(8 p) b.- Si se desea obtener una ganancia de transferencia unilateral de $G_{TU} = 4,54 \text{ dB}$ a f_1 y se escoge una ρ_L que maximice G_2 , encontrar el valor de G_1 necesario y dibujar sobre la carta de Smith adjunta el círculo de ganancia constante G_1 correspondiente.

(9 p) c.- Si el factor de ruido deseado es de $F = 3,84 \text{ dB}$ a f_1 (el círculo correspondiente también se aporta en la figura 1) encontrar los valores ρ_S y ρ_L necesarios, cuidando que se respeten las condiciones de estabilidad y asumiendo que a f_2 lo único que cambian son los parámetros de dispersión del transistor pero no así los factores de reflexión ρ_S y ρ_L .

Con este mismo transistor se desea ahora diseñar un oscilador a $f_2 = 7 \text{ GHz}$ y se ha escogido unas redes de entrada y salida como las mostradas en la figura 2.

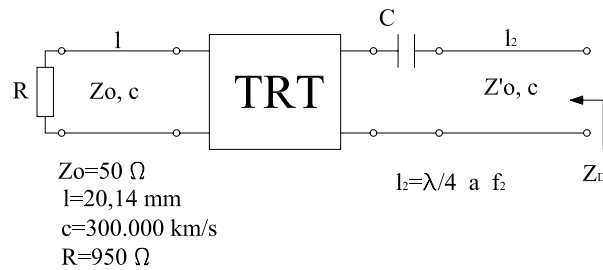


Figura 2: Oscilador

Sabiendo que con dichas redes se pretende conseguir una impedancia de salida en pequeña señal igual a $Z_D = -3Z_o$, con $Z_o = 50 \Omega$,

(8 p) d.- calcular los valores del condensador C y de la impedancia Z'_o para que esto ocurra.

Datos:

Ganancia de transferencia:

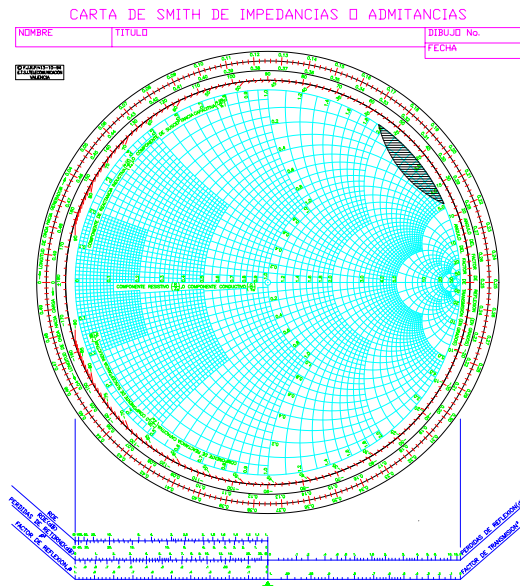
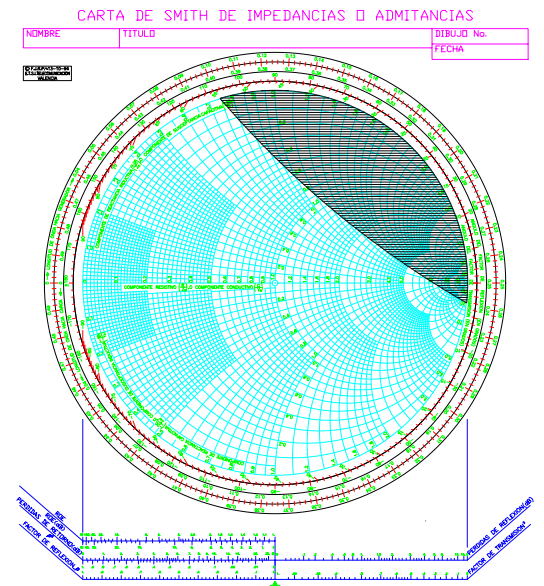
$$G_T = \frac{|S_{21}|^2(1 - |\rho_S|^2)(1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - S_{11}\rho_S)(1 - S_{22}\rho_L) - S_{12}S_{21}\rho_S\rho_L|^2}$$

Círculos de ganancia constante:

$$C_1 = \frac{G_1 S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2} \qquad C_2 = \frac{G_2 S_{22}^*}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2} \qquad r_2 = \frac{\sqrt{1 - G_2(1 - |S_{22}|^2)}}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$

a) Tanto para f_1 como para f_2 el parámetro S_{22} tiene módulo menor que la unidad por lo que el centro de la carta de Smith, $\rho_S = 0$, será estable, y con él todos los puntos que quedan en la misma zona que contiene el origen. De esta forma para el caso de la frecuencia f_1 tendríamos que la zona inestable sería la mostrada en la figura 3 mientras que para la frecuencia f_2 sería la sombreada en la figura 4.

Figura 3: Inestabilidad a f_1 Figura 4: Inestabilidad a f_2

b) La ganancia de transferencia unilateral sabemos que viene dada por:

$$G_{TU} = G_1 |S_{21}|^2 G_2$$

y por otra parte el valor de G_2 máxima se producirá cuando $\rho_L = S_{22}^*$, que supondrá un valor de G_{2max} igual a :

$$G_{2max} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = 1,3043 = 1,1537 \text{ dB}$$

De forma que G_1 deberá valer en dB:

$$G_1(\text{dB}) = G_{TU}(\text{dB}) - 20 \log |S_{21}| - G_2(\text{dB}) = 4,54 - 1,9382 - 1,1537 = 1,448 \text{ dB}$$

En lineal será $G_1 = 1,396$ por lo que el centro y el radio del círculo de ganancia constante G_1 será:

$$C_1 = \frac{G_1 S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2} = 0,5744 \angle 46^\circ$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2} = 0,2864$$

cuyo representación en la carta de Smith será la mostrada en la figura 5

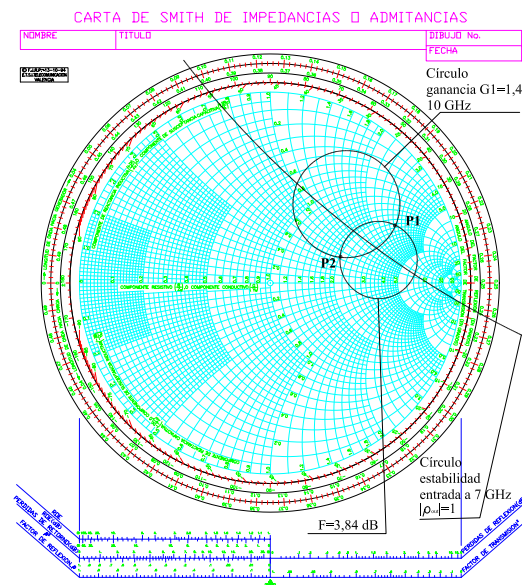


Figura 5: Círculo ganancia constante G_1

c) El factor de reflexión ρ_S seguirá estando en el círculo de ganancia constante G_1 que se intersecta con el círculo de ruido constante en dos puntos P_1 y P_2 , figura 5.

De estos dos puntos P_1 queda dentro de la zona inestable a la frecuencia f_2 por lo que solo será válido el punto P_2 cuyo valor será:

$$\rho_s = 0,39 \angle 20^\circ$$

En cuanto al valor de ρ_L lo escogeremos de forma maximice la ganancia que como vimos en el apartado anterior deberá valer $\rho_L = S_{22}^* = 0,483 \angle 42^\circ$.

d) En primer lugar calculemos el valor del factor de reflexión de fuente ρ_s puesto que conocemos la red de entrada:

$$\rho_s = \frac{950 - 50}{950 + 50} e^{-j2\beta l} = 0,9 e^{-j4\pi l/\lambda}$$

A la frecuencia de 7 GHz la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^9} = 0,04285 \text{ m} = 42,857 \text{ mm}$$

por lo que

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{20,143}{42,857} = 0,47$$

quedando

$$\rho_s = 0,9 \angle_{21,6}$$

Con este factor de reflexión tendremos un factor de reflexión a la salida igual a:

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_s}{1 - S_{11} \rho_s} = 1,222 \angle_{74,62^\circ}$$

que como cabía esperar presenta un factor de reflexión mayor que la unidad por lo tanto la impedancia tendrá una parte real negativa. En concreto la impedancia de salida será:

$$Z_{out} = Z_o \frac{1 + \rho_{out}}{1 - \rho_{out}} = -13,3725 + j63,8617 \Omega$$

Con la red de adaptación de la salida tendremos que convertir esta Z_{out} en un valor de $-3Z_o$, por lo que en primer lugar el condensador será el encargado de cancelar la parte reactiva de Z_{out} :

$$\frac{1}{\omega C} = 63,8617 \Omega$$

quedando que el valor del condensador será:

$$C = \frac{1}{\omega 63,8617} = 0,356 \text{ pF}$$

Mientras que el valor de la impedancia de la línea de $\lambda/4$ será:

$$Z'_o = \sqrt{13,336 \cdot 3 \cdot Z_o} = 44,787 \Omega$$